ერთიანი ეროვნული გამოცდა მათემატიკაში

ტესტის პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ა	ა	დ	ბ	ა	დ	გ	ა	დ	დ	ა	ბ	დ	გ	გ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
გ	ბ	ა	ბ	დ	ბ	ბ	დ	ა	დ	ბ	ა	გ	გ	გ

ამოცანა 31 **2 ქულა**

იპოვეთ $\frac{1-2x}{3+4x}<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.

პასუხი: $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

ამოხსნა

$$\frac{1-2x}{3+4x}<0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

პასუხი: $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

ამოცანა 32 **2 ქულა**

იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის მეოთხე წევრი, თუ ცნობილია, რომ პირველი შვიდი წევრის ჯამი 81-ის ტოლია.

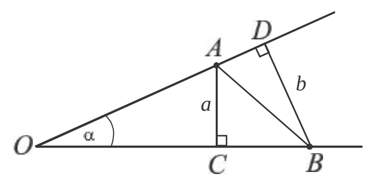
ამოხსნა

არითმეტიკულ პროგრესიაში ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წევრების ჯამი ტოლია. ამიტომ $a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = 2a_4$. მაშინ, $S_7 = 7a_4 = 81$. საიდანაც ვღებულობთ: $a_4 = \frac{81}{7}$.

პასუხი: $\frac{81}{7}$.

ამოცანა 33 **2 ქულა**

AOB მახვილ კუთხეში A წერტილიდან OB სხივამდე მანძილი a-ს ტოლია, ხოლო B წერტილიდან OA სხივამდე მანძილი ტოლია b-სი (იხ. სურათი). იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი, თუ $\angle AOB = \alpha$.



ამოხსნა

$$OB = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha},\ S_{AOB} = \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{ab}{2\sin\alpha}.$$

პასუხი: $\frac{ab}{2\sin\alpha}$.

ამოცანა 34 **2 ქულა**

კლასში 25 მოსწავლეა. აქედან 15-მა მოსწავლემ მონაწილეობა მიიღო მათემატიკის ოლიმპიადაში, 8 მოსწავლემ - ფიზიკის ოლიმპიადაში, ხოლო 6 მოსწავლეს არცერთ ოლიმპიადაში მონაწილეობა არ მიუღია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ კლასიდან შემთხვევით შერჩეულმა მოსწავლემ მონაწილეობა მიიღო ორივე ოლიმპიადაში?

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად 25-6=19 მოსწავლემ მონაწილეობა მიიღო ერთ ოლიმპიადაში მაინც. ორივე ოლიმპიადაში მონაწილეობა მიიღო 15+8-19= 4 მოსწავლემ. მაშინ, ალბათობა იმისა, რომ ამ კლასიდან შემთხვევით შერჩეულმა მოსწავლემ მონაწილეობა მიიღო ორივე ოლიმპიადაში ტოლია $\frac{4}{25}$.

პასუხი. $\frac{4}{25}$.

ამოცანა 35 **3 ქულა**

იპოვეთ $\sin(5x)=\frac{1}{2}$ განტოლების ყველა ამონახსნი, რომელიც მოთავსებულია $(0;\,90°)$ ინტერვალში.

ამოხსნა

$$\sin(5x)=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 5x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+2\pi k,\;\; k\in\mathbb{Z}\\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\;\; k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}\pi k,\;\; k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}\pi k,\;\; k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \;\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}6°+72°k,\;\; k\in\mathbb{Z}\\ 30°+72°k,\;\; k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

ცხადია $(0;\,90°)$ ინტერვალში მოთავსდება შემდეგი მნიშვნელობები $\frac{\pi}{30}=6°$, $\frac{13\pi}{30}=78°$, $\frac{\pi}{6}=30°$.

პასუხი: $6°,\, 30°,\;\, 78°$.

ამოცანა 36 **3 ქულა**

ამოხსენით განტოლება $\frac{\log_9(3x^2)}{\log_9 x}=4$.

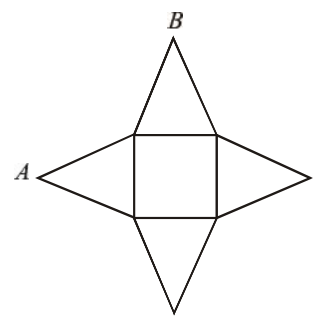
ამოხსნა

რადგან $\frac{\log_9(3x^2)}{\log_9 x}=4 \Rightarrow \log_9(3x^2)=4\log_9 x \Rightarrow \log_9(3x^2)=\log_9 x^4$, ამიტომ გვექნება $3x^2=x^4$. საიდანაც მივიღებთ $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, მაგრამ მოცემული განტოლების ამონახსნია მხოლოდ $x=\sqrt{3}$.

პასუხი: $x=\sqrt{3}$.

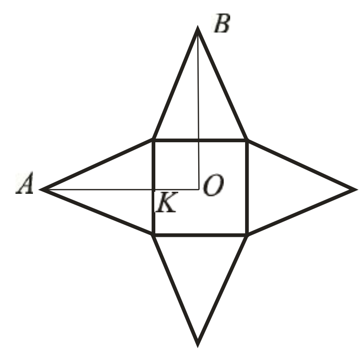
ამოცანა 37 **3 ქულა**

სიბრტყეზე მოცემულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის შლილი (იხ. სურათი). იპოვეთ ამ სიბრტყეზე A და B წვეროებს შორის მანძილი, თუ პირამიდის მოცულობა 8-ის, ხოლო სიმაღლე კი 3-ის ტოლია.



ამოხსნა

$V=\frac{1}{3}hS$ ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ პირამიდის ფუძეში მდებარე კვადრატის ფართობია $S=8$. შესაბამისად კვადრატის გვერდია $2\sqrt{2}$, ხოლო $KO=\sqrt{2}$. AK პირამიდაში წარმოადგენს აპოთემას, რომელიც პათაგორას თეორემის თანახმად ტოლია



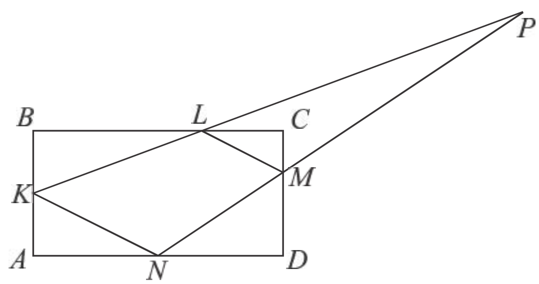
$AK=\sqrt{9+2}=\sqrt{11}$. შესაბამისად $AO=\sqrt{11}+\sqrt{2}$, ხოლო $AB=\sqrt{2}\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{22}$.

პასუხი: $AB=\sqrt{2}\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{22}$.

ამოცანა 38 **4 ქულა**

$ABCD$ მართკუთხედის AB, BC, CD და AD გვერდებზე აღებულია შესაბამისად K, L, M და N წერტილები ისე, რომ $\frac{AK}{KB}=\frac{AN}{ND}=1$, $\frac{BL}{LC}=\frac{DM}{MC}=2$. წრფეები KL და NM იკვეთება P წერტილში. იპოვეთ KP მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=a,\ BC=b$.

ამოხსნა



მართკუთხა სამკუთხედები AKN და CML მსგავსია, რადგან $\frac{AK}{AN}=\frac{CM}{CL}=\frac{a}{b}$. ამიტომ $\angle ANK=\angle CLM$ და მაშასადამე, $KN \parallel LM$. ამიტომ $\triangle PKN \sim \triangle PLM$.

$\frac{PK-KL}{PK}=\frac{LM}{NK}$. რადგან $KL=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{9}b^2}$, $KN=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, $LM=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$, ამიტომ

$3(PK-KL)=2PK$. აქედან $PK=3KL=3\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{9}b^2}$.

პასუხი: $3\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{9}b^2}$.

ამოცანა 39 | 4 ქულა

მოცემულია ოქროს და ვერცხლის ორი შენადნობი. პირველ შენადნობში ოქროს მასის შეფარდება ვერცხლის მასასთან p-ს ტოლია, მეორეში კი - q-სი. რა პროპორციით უნდა ავიღოთ პირველი და მეორე შენადნობი, რომ მათი ერთმანეთთან შედნობის შედეგად მივიღოთ ახალი შენადნობი, რომელშიც ოქროს და ვერცხლს ტოლი წილი ექნებათ, თუ $p<1$, ხოლო $q>1$?

ამოხსნა.

პირველ შენადნობში ოქროს წილი არის $\frac{p}{p+1}$, ხოლო მეორე შენადნობში კი - $\frac{q}{q+1}$. ვთქვათ მიზნის მისაღწევად საჭიროა ავიღოთ x კგ პირველი შენადნობი და y კგ მეორე შენადნობი. მაშინ ახალი შენადნობის მასა იქნება $(x+y)$ კგ და ოქროს შემცველობა მასში იქნება $\left(\frac{p}{p+1}x+\frac{q}{q+1}y\right)$ კგ. რადგან ოქროს და ვერცხლის მასები ახალ შენადნობში ტოლია, ამიტომ შევადგენთ განტოლებას:

$$\frac{p}{p+1}x+\frac{q}{q+1}y=\frac{x+y}{2}.$$

$$\left(\frac{p}{p+1}-\frac{1}{2}\right)x=\left(\frac{1}{2}-\frac{q}{q+1}\right)y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{q}{q+1}}{\frac{p}{p+1}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1-q}{2(q+1)}}{\frac{p-1}{2(p+1)}}=\frac{(q-1)(p+1)}{(1-p)(q+1)}.$$

პასუხი: $\frac{(q-1)(p+1)}{(1-p)(q+1)}$.

ამოცანა 40 | 4 ქულა

რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a და b პარამეტრები, რომ $\begin{cases}(2a-3)x+3y\le 3b\\ 3x-2y\le 5-9b\end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე იყოს ცარიელი?

ამოხსნა 1

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე რომ იყოს ცარიელი აუცილებელია და საკმარისი, რომ უტოლობებით განსაზღვრული წრფეები იყოს პარალელური და ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეები იყოს თანაუკვეთი.

საწყისი სისტემა ტოლფასია $\begin{cases}y\le -\frac{2a-3}{3}x+b\\ y\ge \frac{3}{2}x-\frac{5-9b}{2}\end{cases}$ სისტემის .

შესაბამისი წრფეები პარალელურებია, როდესაც $-\frac{2a-3}{3}=\frac{3}{2}$.

$4a-6=-9 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{4}$. სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე რომ იყოს ცარიელი საჭიროა სრულდებოდეს უტოლობა $-\frac{5-9b}{2}>b$, საიდანაც მივიღებთ $b>\frac{5}{7}$.

პასუხი: $a=-\frac{3}{4}$; $b>\frac{5}{7}$.

ამოხსნა 2

$$\begin{cases} y \le -\dfrac{2a-3}{3}x+b \\ y \ge \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5-9b}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{5-9b}{2} \le -\frac{2a-3}{3}x+b .$$

ამ უკანასკნელ უტოლობას პარამეტრთა რაიმე (a,b) წყვილისთვის აქვს ამონახსენი ან არ აქვს ამონახსენი საწყის სისტემასტან ერთად.

$(3+4a)x \le 15-21b$ უტოლობას არ აქვს ამონახსნი, როდესაც $3+4a=0$ და $15-21b<0$. მაშასადამე, $a=-\frac{3}{4}$; $b>\frac{5}{7}$.

პასუხი: $a=-\frac{3}{4}$; $b>\frac{5}{7}$.