ერთიანი ეროვნული გამოცდა მათემატიკაში 2019

ტესტის პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ბ	გ	დ	ბ	გ	დ	დ	დ	გ	ა	ბ	გ	დ	ა	დ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ბ	დ	ა	ა	ა	ბ	ბ	ა	გ	გ	ბ	ა	ა	გ	გ

ამოცანა 31 **2 ქულა**

ამოხსენით უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x+11 \ge 1-3x \\ 4(x-3) < x+6 \end{cases}.$$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 2x+11 \ge 1-3x \\ 4(x-3) < x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \ge -10 \\ 3x < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x < 6.$$

პასუხი: $x \in [-2;\, 6)$.

ამოცანა 32 **2 ქულა**

იპოვეთ 1; -4; 12; x; 5; 3 რიცხვითი მონაცემების საშუალო, თუ ამ მონაცემების მედიანა $3,8$ -ის ტოლია.

ამოხსნა

x -ის გარდა ყველა რიცხვითი მონაცემი დავალაგოთ ზრდადობით: -4; 1; 3; 5; 12. რადგან მონაცემების რაოდენობა ლუწი რიცხვია, მისი მედიანა ტოლია შუა ორი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულის. მაშინ x უნდა იყოს მოთავსებული 3-სა და 5-ს შორის, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მედიანა იქნება ან 3-ზე ნაკლები ან 4-ის ტოლი. ამიტომ გვაქვს განტოლება

$$\frac{3+x}{2} = 3,8 \quad \Rightarrow \quad x = 4,6.$$

მონაცემების საშუალო ტოლია $\dfrac{-4+1+3+5+12+4,6}{6} = \dfrac{21,6}{6} = 3,6$

პასუხი: 3,6.

ამოცანა 33 **2 ქულა**

Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში. იპოვეთ ამ წრეწირის სიგრძე, თუ $A(3;2)$ წერტილი მასზე მდებარეობს.

ამოხსნა

ვთქვათ ამ წრეწირის რადიუსია R. მაშინ, მისი განტოლებაა $x^2+y^2=R^2$. რადგან $A(3;2)$ წერტილი წრეწირზე მდებარეობს, გვაქვს ტოლობა: $R^2=3^2+2^2=13$. ვღებულობთ, $R=\sqrt{13}$ და ამიტომ წრეწირის სიგრძე ტოლია $2\pi\sqrt{13}$ -ის.

პასუხი: $2\sqrt{13}\pi$.

ამოცანა 34 **2 ქულა**

იპოვეთ x, თუ ცნობილია, რომ რიცხვთა მიმდევრობა $-1;\ 3-\sqrt{x-1};\ 4$ არის არითმეტიკული პროგრესია.

ამოხსნა

არითმეტიკული პროგრესიის შუა წევრის თვისების თანახმად $6-2\sqrt{x-1}=-1+4$.
ამ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ: $\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$ **.** რადგან $x\geq 1$, მიღებული პასუხი წარმოადგენს განტოლების ფესვს.

პასუხი: $\frac{13}{4}$.

ამოცანა 35 **3 ქულა**

იპოვეთ $y=\log_2\left(\frac{x}{2x-1}\right)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა

ლოგარითმი განსაზღვრულია დადებითი რიცხვებისათვის, ამიტომ $\frac{x}{2x-1}>0$.

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

ან

$$\begin{cases} x<0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x<0$$

პასუხი: $(-\infty;\ 0)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

ამოცანა 36 **3 ქულა**

იპოვეთ a და b პარამეტრების ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $ax+3b=5bx-4a+1$ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი.

ამოხსნა

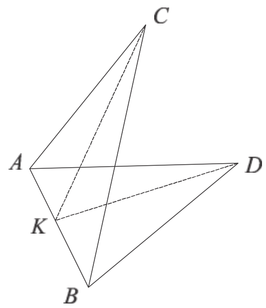
$ax+3b=5bx-4a+1 \Leftrightarrow (a-5b)x=1-4a-3b$. ამ უკანასკნელ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მართებულია შემდეგი ორი ტოლობა: $a-5b=0$ და $1-4a-3b=0$. პირველი ტოლობიდან $a=5b$, მაშინ მეორე ტოლობიდან ვიღებთ:
$1-20b-3b=0 \Rightarrow b=\dfrac{1}{23}$, $a=\dfrac{5}{23}$.

პასუხი: $a=\dfrac{5}{23}$, $b=\dfrac{1}{23}$.

ამოცანა 37 **3 ქულა**

სხვადასხვა სიბრტყეში მდებარე ორ ABC და ABD ტოლფერდა სამკუთხედს აქვს საერთო AB ფუძე, რომლის სიგრძე 8 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედების სიბრტყეებს შორის მდებარე ორწახნაგა კუთხის სიდიდე, თუ $AC=4\sqrt{5}$ სმ, $AD=\sqrt{41}$ სმ და $CD=7$ სმ.

ამოხსნა

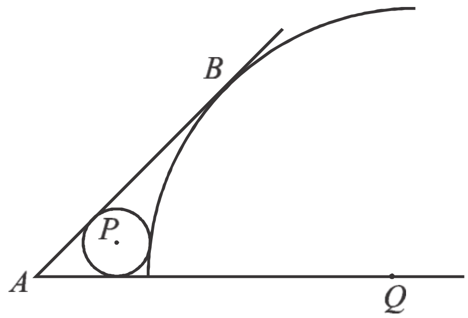


ვთქვათ, K არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად $CK\perp AB$, $DK\perp AB$ და სამკუთხედების სიბრტყეებს შორის მდებარე ორწახნაგა კუთხის სიდიდე ტოლია CKD კუთხის სიდიდის. CKD სამკუთხედიდან კოსინუსების თეორემის თანახმად გვექნება

$\cos K=\dfrac{KC^2+KD^2-CD^2}{2KC\cdot KD}$, სადაც $KC=\sqrt{AC^2-AK^2}=\sqrt{80-16}=8$სმ, ხოლო $KD=\sqrt{41-16}=5$სმ.
მაშასადამე $\cos K=\dfrac{64+25-49}{80}=\dfrac{1}{2}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\angle CKD=60°$

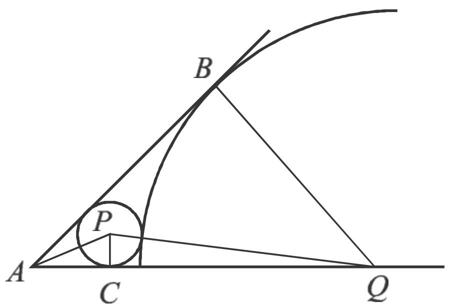
პასუხი: $60°$.

ამოცანა 38 **4 ქულა**



წრეწირი, რომლის ცენტრი Q მოთავსებულია $60°$ -იანი A კუთხის გვერდზე, ეხება ამ კუთხის მეორე გვერდს B წერტილში (იხ. სურათი). A კუთხეში ჩახაზულია მეორე წრეწირი ცენტრით P წერტილში, რომელიც ეხება პირველ წრეწირს ისე, როგორც ეს სურათზეა გამოსახული. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსის შეფარდება მცირე წრეწირის რადიუსთან.

ამოხსნა



აღვნიშნოთ დიდი წრეწირის რადიუსი R-ით, ხოლო მცირე წრეწირის რადიუსი r-ით. დავუშვათ მცირე წრეწირის P ცენტრიდან PC მართობი AQ წრფეზე, ხოლო დიდი წრეწირის Q ცენტრიდან QB მართობი A კუთხის მეორე გვერდზე. P წერტილი A კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობს, ამიტომ $AC = \dfrac{PC}{\operatorname{tg} 30°} = r\sqrt{3}$.

$CQ = \sqrt{PQ^2 - PC^2} = \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr}$, $R = QB = AQ \cdot \sin 60° = \dfrac{(AC+CQ)\sqrt{3}}{2}$. მივიღებთ განტოლებას $2R = \left(r\sqrt{3} + \sqrt{R^2+2Rr}\right)\sqrt{3} \Rightarrow 2R - 3r = \sqrt{3R^2 + 6Rr} \Rightarrow 4R^2 - 12Rr + 9r^2 = 3R^2 + 6Rr \Rightarrow$ $R^2 - 18Rr + 9r^2 = 0$. აღვნიშნოთ $k = \dfrac{R}{r}$, გვექნება $k^2 - 18k + 9 = 0$. $k_1 = 9 - 6\sqrt{2} < 1$, $k_2 = 9 + 6\sqrt{2} > 1$. k_1 ფესვი არ შეესაბამება ამოცანის პირობას, რადგან $R > r$, ამიტომ $k = 9 + 6\sqrt{2}$.

პასუხი: $9 + 6\sqrt{2}$

ამოცანა 39 **4 ქულა**

რამდენი ლიტრი 40%-იანი სპირტი და რამდენი ლიტრი 52%-იანი სპირტი უნდა შევურიოთ ერთმანეთს, რომ მივიღოთ 10 ლიტრი 48%-იანი სპირტი.

ამოხსნა

ვთქვათ, გვჭირდება x ლიტრი 40%-იანი სპირტი და y ლიტრი 52%-იანი სპირტი, მაშინ ამოცანის პირობის თანხმად გვექნება

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{13y}{25} = \dfrac{24}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + 13y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - x \\ 10x + 130 - 13x = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{20}{3} \\ x = \dfrac{10}{3} \end{cases}.$$

პასუხი: $\dfrac{10}{3}$ ლიტრი 40%-იანი სპირტი და $\dfrac{20}{3}$ ლიტრი 52%-იანი სპირტი

ამოცანა 40 **4 ქულა**

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც კვადრატულ განტოლებას $3x^2-(2a+1)x+3a=0$ გააჩნია ორი ნამდვილი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი x_1 და x_2, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $(x_1)^2+(x_2)^2<1$.

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება, რომ $D=(2a+1)^2-36a>0$.

მაშინ $x_1=\dfrac{2a+1-\sqrt{D}}{6}$, $x_2=\dfrac{2a+1-\sqrt{D}}{6}$ და

$$\left(\frac{2a+1-\sqrt{D}}{6}\right)^2+\left(\frac{2a+1+\sqrt{D}}{6}\right)^2<1 \Leftrightarrow \left(2a+1-\sqrt{D}\right)^2+\left(2a+1+\sqrt{D}\right)^2<36 \Leftrightarrow$$

$$\left(2a+1\right)^2+D<18 \Leftrightarrow 2(2a+1)^2-36a<18 \Leftrightarrow (2a+1)^2-18a<9.$$

მივიღეთ უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases}(2a+1)^2-36a>0\\(2a+1)^2-18a<9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a^2-32a+1>0\\2a^2-7a-4<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<4-\dfrac{\sqrt{63}}{2} \text{ ან } a>4+\dfrac{\sqrt{63}}{2}\\-0,5<a<4\end{cases}.$$

რომლის ამონახსნია $a\in\left(-\dfrac{1}{2};4-\dfrac{\sqrt{63}}{2}\right)$.

პასუხი: $a\in\left(-\dfrac{1}{2};4-\dfrac{\sqrt{63}}{2}\right)$